

## 一/ 雾生成模型（雾退化模型）

$$I(x) = J(x) \cdot e^{-rd(x)} + A(1 - e^{-rd(x)}) \quad (1)$$

$x$ 是图像像素的空间坐标,  $I$ 是观察到的有雾图像,  $J$ 是待恢复的无雾图像,  
 $r$ 表示大气散射系数,  $d$ 代表景物深度,  
 $A$ 是全局大气光, 通常情况下假设为全局常量, 与空间坐标 $x$ 无关

根据  $I(x)$ , 求解  $J(x) \iff$  去雾.

$I(x)$  已知,  $e^{-rd(x)}$  为  $x$  处透射率  $t(x)$  种,  $A$  未知但取定值

$$\text{故 (1)} \implies I(x) = J(x) \cdot t(x) + A(1 - t(x)) \quad (2)$$

$$t(x) = \frac{A - I(x)}{A - J(x)} \quad (3)$$

$\swarrow$   
 $\nwarrow$  主为定值

$$t(x) \in [0, 1], \quad I(x), J(x) \in [0, 255]$$

去雾要求 对比度高, 且失真度小

## 二/ 大气光A估计的策略（四叉树递归）

传统: 雾  $\rightarrow$  图像变灰  $\rightarrow$  灰度值高 ( 往白偏, 在255偏)

$\implies$  取全图灰度最高的点当  $A$ .

$\times$  有些无雾条件 本身灰度值高的点会干扰  $A$  取值

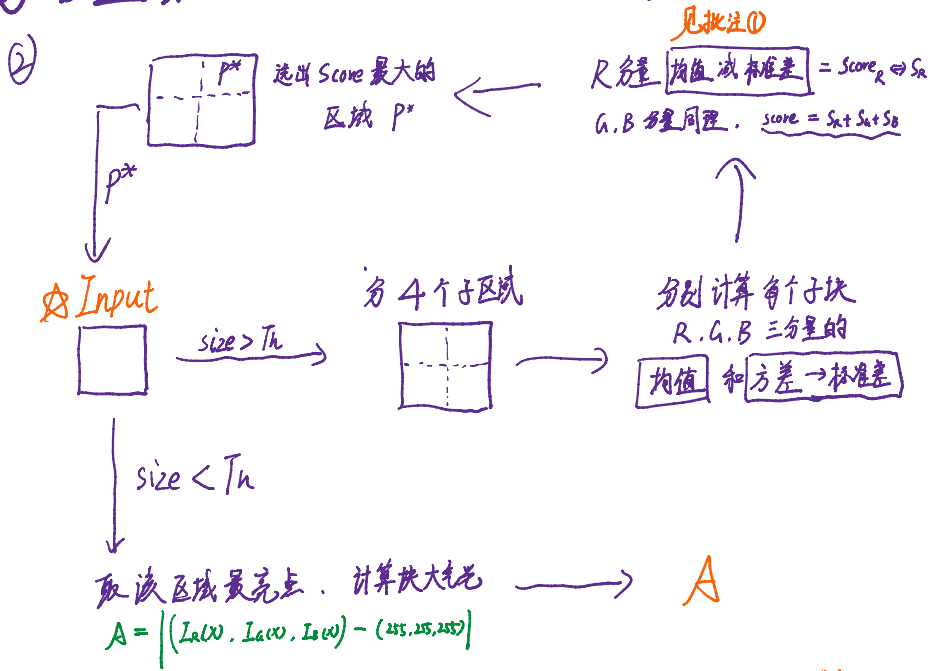
本文: 雾重区域内 图像像素差异小



区域 像素方差值小

$\checkmark$  排除 高亮点但有细节的区域, 不会过补偿 该区域

方法：① 设置最小搜索区域大小的阈值  $T_h$



批注①：可以理解为 Score 为加权和得分，即  $\frac{\text{均值}}{\text{权1}} + (-\frac{\text{标准差}}{\text{权2}}) = \text{Score}$ ，其中  
 权1为平均灰度值，越大越有可能是大气光的像素位置，故取正（加）  
 权2为 标准差（方差），越小说明区域像素值变化越小，越可能是雾区域，故取负（减）

### 三/ 透射率 $t(x)$ 估计的策略

变换 (2) 式  $I(x) = J(x) \cdot t(x) + A(1-t(x))$

$$J(x) = \frac{I(x) - A(1-t(x))}{t(x)}$$

$$\Rightarrow J(x) = \frac{1}{t(x)} [I(x) - A] + A \quad (4)$$

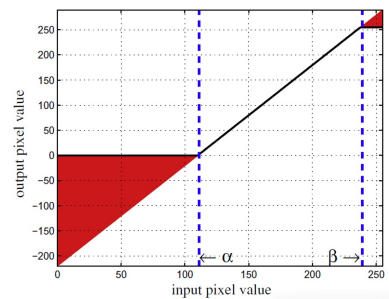
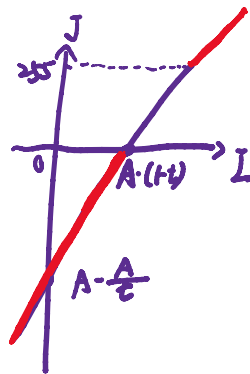
$$= \frac{1}{t(x)} \cdot I(x) - \frac{A}{t(x)} + A \quad (5)$$

可见  $J(x)$  与  $I(x)$  是线性关系

斜率  $k = \frac{1}{t(x)} \geq 1$

与 x 轴交  $(A \cdot [1-t(x)], 0)$

与 y 轴交  $(0, A - \frac{A}{t(x)})$



如右图， $I$  在  $[0, A(1-t)]$  时， $J$  会推理出负值（会被舍）

当  $A$  较大且  $t$  较小时， $J$  会推理出超过 255 的值  
使生成的  $J$  图失真（丢失信息）， $A \in [0, 255]$ ,  $t \in [0, 1]$

本文：设计一个代价函数  $Cost$ ，由 对比度 和 失真度 共同构成  
Contrast loss

① 衡量失真度：(单点)

$$E_{loss} = \sum_{c \in \{r, g, b\}} \left[ \min(0, J_c(x)) \right]^2 + \left[ \max(0, J_c(x) - 255) \right]^2$$

其中， $c$  代表  $rgb$  通道的 index， $\sum_c$  即对  $rgb$  三通道都算一遍再求和

② 衡量对比度增强：(单点)

文中指出了 3 种 (MSE, Michelson, Weber)  
但最后选用了 MSE.

$$E_{contrast} = - \sum_{c \in \{r, g, b\}} \frac{(J_c(x) - \bar{J}_c)^2}{N_{pix}}$$
$$= - \sum_{c \in \{r, g, b\}} \frac{(I_c(x) - \bar{I}_c)^2}{t^2 \cdot N_{pix}}$$

其中， $N_{pix}$  指区域内的像素点总数，该式取负

由于  $J(x) = \frac{1}{t(x)} \cdot I(x) - \frac{A}{t(x)} + A \Leftarrow (5)$  式

理论上求  $J(x)$ ，应该算每个点的  $t(x)$ ，但这样效率太低  
故用  $x$  点附近的区域  $B$  内的 优解 代替  $B$  内所有  $x$  对应的  $t(x)$   
即  $t_{x \in B}(x) = t_B$ ， $t_B$  由代价函数  $E$  来确认



③ 计算一个区域B的代价，则将区域的每个像素

的  $E_{loss}$  和  $E_{contrast}$  求和，即  $\sum_{x \in B} E_{loss} = E_{Bloss}$

$\sum_{x \in B} E_{contrast} = E_{Bcontrast}$

$$\begin{aligned} \text{而 } E_{Bloss} &= \sum_{c \in (r,g,b)} \sum_{x \in B} \left\{ \left[ \min\{0, J_c(x)\} \right]^2 + \left[ \max\{0, J_c(x) - 255\} \right]^2 \right\} \\ &= \sum_{c \in (r,g,b)} \left\{ \sum_{I_c=0}^{A_c} \left( \frac{I_c - A_c}{t} + A_c \right)^2 \cdot h_c(I_c) + \sum_{I_c=A_c}^{255} \left( \frac{I_c - A_c}{t} + A_c - 255 \right)^2 \cdot h_c(I_c) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

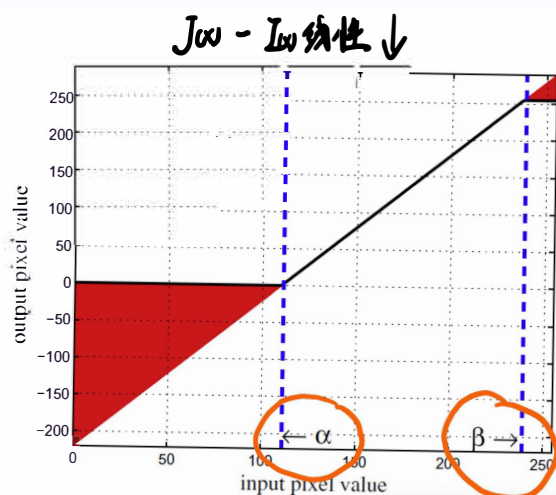
其中， $\alpha, \beta$  如图，

参考 (5) 式，即  $I \in [\alpha, \beta]$  时，

$J$  的取值在  $[0, 255)$ ，不会溢出

所以  $E_{Bloss}$  计算  $I \in (0, \alpha), (\beta, 255)$  时的损失

$h_c(I)$  为当前通道内  $I$  的直方图值



$$\begin{aligned} E_{Bcontrast} &= - \sum_{c \in (r,g,b)} \sum_{x \in B} \left\{ \frac{(J_c(x) - \bar{J}_c)^2}{N_B} \right\} \\ &= - \sum_{c \in (r,g,b)} \sum_{x \in B} \left\{ \frac{(I_c(x) - \bar{I}_c)^2}{t^2 N_B} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\star \underline{E = E_{Bcontrast} + \lambda E_{Bloss}} \quad (8)$$

其中， $\lambda$  为权重因子，平衡失真和对比度代价

由于有  $\begin{cases} \min_{c \in (r,g,b)} \min_{x \in B} J_c(x) \geq 0 \\ \max_{c \in (r,g,b)} \max_{x \in B} J_c(x) \leq 255 \end{cases} \Leftrightarrow J \text{ 的取值}$

加上 (3) 式  $t_c(x) = \frac{A_c - I_c(x)}{A_c - J_c(x)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t \geq \min_{c \in (r, b)} \min_{x \in B} \left\{ \frac{A_c - I_c(x)}{A_c} \right\} \\ t \geq \max_{c \in (r, b)} \max_{x \in B} \left\{ \frac{A_c - I_c(x)}{A_c - 255} \right\} \end{cases}, A_c \in [0, 255]$$

$$\Rightarrow t \geq \max \left\{ \min_{c \in (r, b)} \min_{x \in B} \left\{ \frac{A_c - I_c(x)}{A_c} \right\}, \max_{c \in (r, b)} \max_{x \in B} \left\{ \frac{A_c - I_c(x)}{A_c - 255} \right\} \right\}$$

(7) 式可知  $E_{B \text{ contrast}}$  是关于  $t$  的增函数,

所以  $t$  取等号 (最小),  $E_{B \text{ contrast}}$  最小, 即  $t$  的下取值  $t^*$

$$t^* = \max \left\{ \min_{c \in (r, b)} \min_{x \in B} \left\{ \frac{A_c - I_c(x)}{A_c} \right\}, \max_{c \in (r, b)} \max_{x \in B} \left\{ \frac{A_c - I_c(x)}{A_c - 255} \right\} \right\}$$

而根据 (6) 式,  $E_{B \text{ loss}}$  是关于  $t$  的减函数

故  $t$  越大,  $E_{B \text{ loss}}$  越小 冲突!

而  $t$  越小,  $E_{B \text{ contrast}}$  越小

则用入权重来取舍, 希望损失少 or 对比度高

当入固定时, 从  $t \in (t^*, 1)$  中找出  $E$  最小的  $t_B$

$t_B$  即 所求  $B$  区域透射率, 取  $x \in B$  内的  $t(x)$

#### 四/ 透射率 $t(x)$ 估计策略的优化 (?)

由于上述“以块代点”的  $t_B$  策略中, 块内可能正好有较大的景深  $d$  值变化

导致  $t_B = t(x) = e^{-r \cdot d(x)}$  中, 当  $t_B$  确定, 不同  $x$  的  $d$  表示有误

无法正确估计景深, 导致块效应

故, 以  $x$  位置为基础, 块大小不变 (如  $32 \times 32$  pixel)  
 在包含  $x$  点的所有块区域内找一个像素方差最小 (差异最小) 的块



此外, 使用导向滤波对  $t$  进行优化

$$\hat{t}(q) = S^T \cdot I(q) + \phi, \quad q \in W$$

即假定过滤波后的  $\hat{t}$  是引导图  $I$  的仿射组合 (线性)

$S^T = (S_r, S_g, S_b)^T$ , 是一个缩放向量 (Vector)

$\phi$  是一个偏移量,  $q$  是窗口  $W$  内的点

$S^T, \phi$  都由选定的窗口决定: 对于每个窗口  $W$ , 有最佳参数组  $(S^*, \phi^*)$

通过  $t_w$  和  $\hat{t}_w$  的差值最小化确定  $(S^*, \phi^*)$

使用最小二乘法:  $(S^*, \phi^*) = \arg \min_{S, \phi} \sum_{q \in W} (t(q) - \hat{t}(q))^2$

$\arg \min_{S, \phi} F(S, \phi)$  指当  $F(S, \phi)$  取最小时  $S, \phi$  的值

即  $\sum_{q \in W} (t(q) - \hat{t}(q))^2$  最小时, 取  $S^*, \phi^*$  计算  $\hat{t}(q)$

## 五/ 视频去雾

图像去雾直接运用到视频单帧上, 不具备 时间相关性

为了减少复杂度, 从 RGB  $\rightarrow$  YUV, 再仅对 Y 分量计算  $t$  透射率

U, V 不能用, 因为对灰度不敏感, 会破坏算法对雾的判断

假设一个场景的原始辐射值在两帧间无变化

$$J_Y^k(p) = J_Y^k(p)$$

其中,  $J$  为原图像辐射值,  $Y$  为通道,  $k$  为帧

可以假设整个视频中大气光  $A$  不变 (也可以重新计算)

$$\text{由于 } t_k(p) = \frac{I_Y^k(p) - A_Y}{J_Y^k(p) - A_Y} = t_{k+1}(p) = \frac{I_Y^{k+1}(p) - A_Y}{J_Y^{k+1}(p) - A_Y}$$

则透射率有:  $t_k(p) = \gamma_k(p) \cdot t_{k+1}(p)$

$$\text{而 } \gamma_k(p) = \frac{I_Y^k(p) - A_Y}{I_Y^{k+1}(p) - A_Y}$$

但这只是两帧同一位置的测算, 而场景点会移动, 理论上要跟踪 P 点的移动, 对应计算, 但太复杂!

给出一个概率模型用于快速计算  $t_k$

根据两帧的差异图像, 有以下:

$$w_k(p) = \exp\left(-\frac{[I_Y^k(p) - I_Y^{k+1}(p)]^2}{\sigma^2}\right), \text{ 其中 } \exp \text{ 是以 } e \text{ 为底的指数函数}$$

$\sigma$  用来控制两帧差的敏感级,  $I^k$  和  $I^{k+1}$  越相似,  $w_k(p)$  越大

$w_k$  为概率权重, 即两帧越相似, 该值越大

给  $\gamma_k(p)$  计算乘以  $w_k(p)$  权重, 即  $\bar{\gamma}_k(p) = \gamma_k(p) \cdot w_k(p)$

根据  $t_k = \gamma_k \cdot t_{k+1}$  的一致性假设, 代入概率加权的  $\bar{\gamma}_k$

$t_k$  与  $\bar{\gamma}_k \cdot t_{k+1}$  的差异越小, 则一致性越高

但两帧变化较大时,  $w_k(p)$  的值太小, 导致  $\bar{\gamma}_k$  不准确,

所以用 Block 内的平均权重  $\bar{w}_k$  代替  $w_k(p)$  会更稳定

$$\bar{w}_k = \frac{1}{N_B} \cdot \sum_{p \in B} w_k(p), \text{ } N_B \text{ 为 Block 内像素数}$$

此时构建时间一致性代价函数

$$E_{\text{temporal}} = \bar{w}_k \cdot (t_k - \bar{\gamma}_k \cdot t_{k+1})^2$$

参考图像找  $t_k$  的代价函数,

$$E_U = E_{\text{contrast}} + \lambda_L \cdot E_{\text{loss}} + \lambda_T \cdot E_{\text{temporal}}$$

可以先用  $E_U = E_{\text{contrast}} + \lambda_L \cdot E_{\text{loss}}$  找第 1 帧的  $t_1, t_2, t_3$  用  $E_U$  去找.